



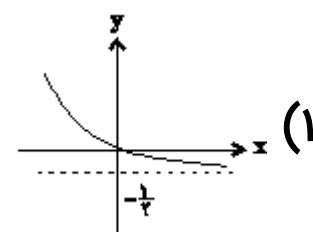
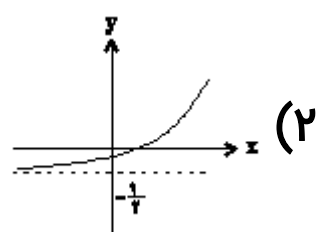
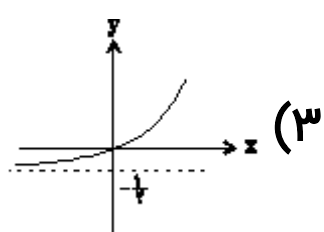
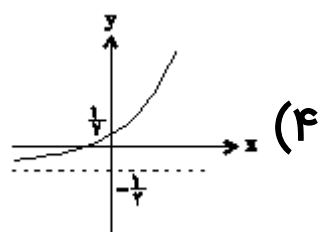
shakeryan.com

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: لگاریتم نمائی - درس سوم - قلم چی

①

نمودار تابع نمایشی $y = 4(2^{x-3}) - \frac{1}{2}$ شبیه به نمودار کدام گزینه است؟

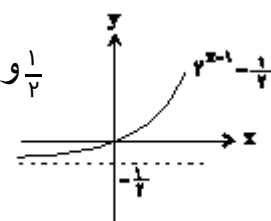
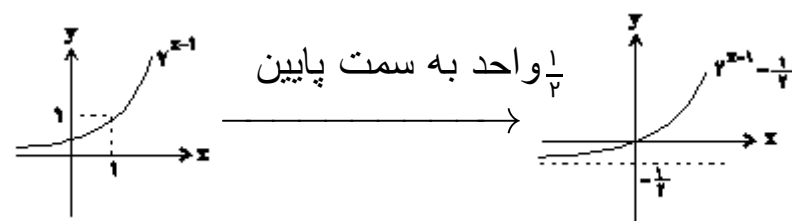
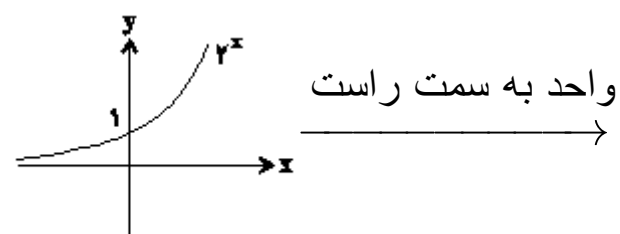


دشوار

قلم چی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

$$y = 4(2^{x-3}) - \frac{1}{2} = 2^2(2^{x-3}) - \frac{1}{2} = 2^{x-1} - \frac{1}{2}$$



۲

از معادله $\log_3^{(2x+1)} + \log_3^{\sqrt{2x+1}} + \log_3^{\sqrt[3]{2x+1}} = \frac{11}{3}$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x^2}$ در مبنای ۴ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) ۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

از ویژگی $\log_b^a = n \log_b^a$ استفاده می‌کنیم:

$$\log_3^{(2x+1)} + \log_3^{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} + \log_3^{(2x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2x+1)} + \frac{1}{2} \log_3^{(2x+1)} + \frac{1}{3} \log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{6} \log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3} \Rightarrow \log_3^{(2x+1)} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{3} = 2$$

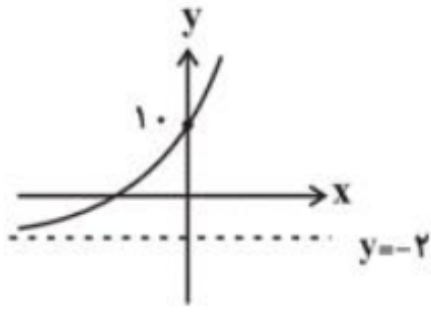
$$\Rightarrow \log_3^{(2x+1)} = 2 \Rightarrow 2x + 1 = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

$$\log_4^{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x=4} \log_4^{\sqrt[3]{4^2}} = \log_4^{4^{\frac{2}{3}}} = \log_4^{4^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}$$

۳

نمودار تابع $y = 3 \times 2^{x+a} + b$ به صورت زیر می باشد. حاصل $a + b$ کدام است؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۴»

چون نمودار تابع نمایی دارای برد $(-2, +\infty)$ می باشد، پس $b = -2$ می باشد.

$$y = 3 \times 2^{x+a} - 2 \xrightarrow{(0,10)} 10 = 3 \times 2^a - 2 \rightarrow 3 \times 2^a = 12$$

$$2^a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

۴

اگر $\log(2^x + 8) = \log 2 + x \log 2$ باشد، حاصل $\frac{\log_x^3 + 3}{\log_x^3 + 1}$ کدام است؟

- ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

ساده

درصد پاسخگویی ۳۷%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۴»

$$\log(2^x + 8) = \log 2 + x \log 2 \Rightarrow \log(2^x + 8) = \log 2 + \log 2^x$$

$$\Rightarrow \log(2^x + 8) = \log 2^{x+1} \Rightarrow 2^x + 8 = 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow 8 = 2^{x+1} - 2^x = 2^x \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\log_x^3 + 3}{\log_x^3 + 1} = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

۵

نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ و $g(x) = \log_3(-x)$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

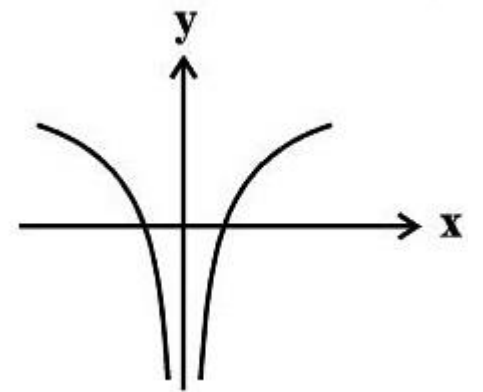
- (۱) منطبق بر هم هستند.
(۲) در هیچ نقطه‌ای متقاطع نیستند.
(۳) $f(x)$ همواره بالاتر از $g(x)$ است.
(۴) $g(x)$ همواره بالاتر از $f(x)$ است.

پاسخ: گزینه ۲

ساده درصد پاسخگویی ۴۲% قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینه «۲»

دامنه $y = \log_{\frac{1}{3}} x = \log_3 x$ فاصله $(0, +\infty)$ و دامنه $y = \log_3(-x)$ به صورت $(-\infty, 0)$ است؛ پس هیچ دامنه مشترکی ندارند، در نتیجه هیچ کدام بالای دیگری نیست.
دو نمودار به شکل زیر هستند و نشان می‌دهد این دو منحنی نسبت به محور y ها قرینه هم هستند.



۶

برد تابع $f(x) = \frac{4^x - 2^x - 2}{5 - 2^x}$ به صورت $\{b\} - (-\infty, a)$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

(۴) -۱۳

(۳) -۱۲

(۲) -۱۱

(۱) -۱۰

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

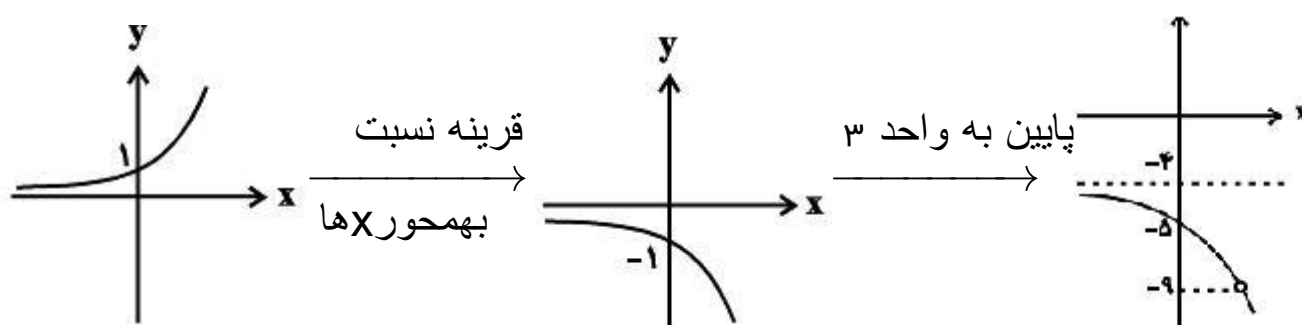
قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f(x) = \frac{4^x - 2^x - 2}{5 - 2^x} = \frac{(5 - 2^x)(-2^x - 4)}{5 - 2^x} = -2^x - 4$$

ضابطه را ساده می‌کنیم:



$$y = 2^x$$

$$y = -(2^x)$$

اگر $2^x = 5$ باشد، مقدار $4 - (2^x) - 4$ برابر است با: $-5 - 4 = -9$

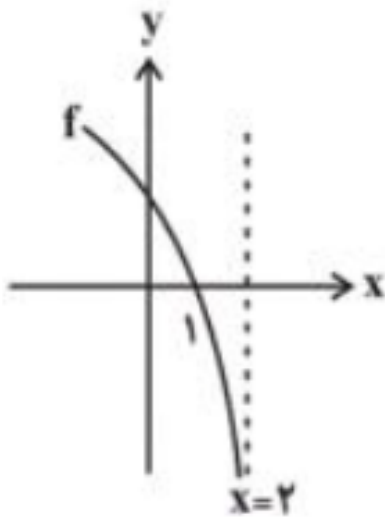
پس -9 در برد f نیست.

با توجه به نمودار برد تابع f به صورت $\{-9\} - (-\infty, -4)$ است. پس:

$$\begin{aligned} a &= -4 \\ b &= -9 \end{aligned} \Rightarrow a + b = -13$$

۷

شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = a + \log(b - x)$ است، حاصل
 $\log_{\sqrt{b}}(\sqrt{2a+b})$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

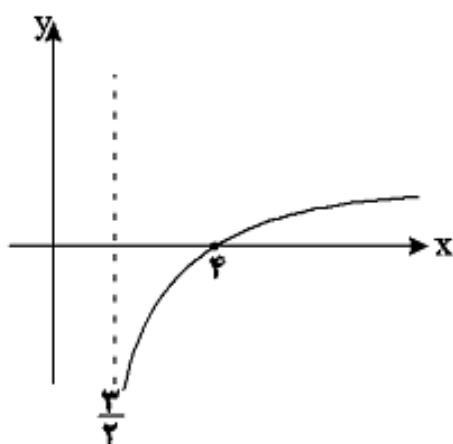
نمودار داده شده، نمودار تابع $y = \log x$ است که ابتدا نسبت به محور y ها قرینه شده و سپس به اندازه ۲ واحد به سمت راست منتقل شده است، بنابراین $b = 2$ است. همچنین نمودار تابع f محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده بنابراین $f(1) = 0$ است. پس:

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + \log(2 - 1) = 0 \Rightarrow a + \log 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\log_{\sqrt{b}}(\sqrt{2a+b}) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2 \times 0 + 2}) = \log_{\sqrt{2}}^2 = \log_{\frac{1}{2}}^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}}^2 = 2$$

۸

شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = -1 + \log_b(2x - a)$ است. این نمودار خط $y = 1$ را با کدام طول قطع می‌کند؟



۸ (۱)

۹ (۲)

۱۲ (۳)

۱۴ (۴)

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۳%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

دامنه لگاریتم طبق شکل بازه $(\frac{3}{2}, +\infty)$ است، از طرفی دامنه تابع $f(x)$ برابر $(\frac{a}{2}, +\infty)$ است.

پس: $\frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 3$

از طرفی طبق شکل $f(4) = 0$ است، پس داریم:

$$-1 + \log_b(2 \times 4 - 3) = 0 \Rightarrow \log_b 5 = 1 \Rightarrow b = 5$$

حال باید نمودار تابع $y = f(x)$ را با خط $y = 1$ تقاطع دهیم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow -1 + \log_5(2x - 3) = 1 \Rightarrow \log_5(2x - 3) = 2$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 5^2 \Rightarrow x = 14$$

۹

اگر $x^{\log_x} = 27$ باشد، $\log_x$ کدام می‌تواند باشد؟

۹ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

$3\sqrt{3}$ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲%

قلمچی ۱۳۹۹

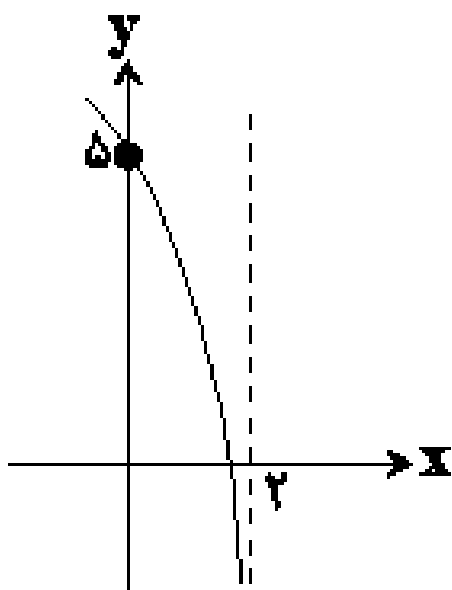
پاسخ: گزینه ۳

از دو طرف تساوی، لگاریتم در پایه ۳ می‌گیریم:

$$\log_3^{\log_3^x} = \log_3^{27} \Rightarrow \log_3^x \times \log_3^x = 3$$

$$\Rightarrow \log_3^x = \sqrt{3} \text{ یا } \log_3^x = -\sqrt{3}$$

نمودار تابع $f(x) = \log_2(ax + 8) + b$ به صورت مقابل است. حاصل ab کدام است؟



(۱) -۴

(۲) -۶

(۳) -۸

(۴) -۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

واضح است که $f(0) = 5$ بنابراین:

$$\log_2(0 + 8) + b = 5 \Rightarrow 3 + b = 5 \Rightarrow b = 2$$

از طرف دیگر دامنه تابع بازه $(-\infty, 2)$ است. پس $x = 2$ باید در معادله $ax + 8 = 0$ صدق کند که نتیجه می‌شود:

$$2a + 8 = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow ab = -8$$

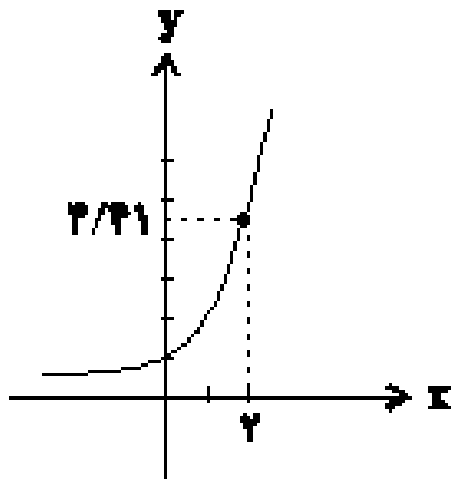
ساده

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۹

۱۱

اگر نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ به شکل مقابل باشد، کدام نقطه روی نمودار قرار ندارد؟



(۱) $(1, 2/1)$

(۲) $(-1, \sqrt{2/1})$

(۳) $(3, 9/261)$

(۴) $(\frac{2}{3}, \sqrt[3]{4/41})$

پاسخ: گزینه ۲

ساده

درصد پاسخگویی ۴۹%

قلمچی ۱۳۹۹

با توجه به آن که نقطه $(2, 4/41)$ روی نمودار تابع f قرار دارد، پس:

$$y = a^x \Rightarrow 4/41 = a^2 \xrightarrow{a>0} a = 2/1$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2/1 = 2/1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2/1 = \frac{1}{2/1} \\ x = 3 \Rightarrow y = 2/1 = 9/261 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 2/1 = \sqrt[3]{2/1} = \sqrt[3]{4/41} \end{cases}$$

۱۲

انرژی یک زلزله‌ای a برابر زلزله‌ای دیگر است ($a > 1$). اگر دو زلزله، $\frac{Y}{6}$ ریشتر اختلاف داشته باشند، a کدام است؟ ($\log E = 11/8 + 1/5M$)

(۴) $1000\sqrt[4]{10}$

(۳) $10\sqrt[4]{1000}$

(۲) $10\sqrt[4]{100}$

(۱) $100\sqrt[4]{10}$

پاسخ: گزینه ۳

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۹

انرژی یکی از زلزله‌ها را E_2 (بزرگ‌تر) و دیگری را E_1 (کوچک‌تر) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \log E_1 &= 11/8 + 1/5M_1 \\ \log E_2 &= 11/8 + 1/5M_2 \\ &\rightarrow \log E_2 - \log E_1 \\ &= 1/5(M_2 - M_1) \rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1/5\left(\frac{Y}{6}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{Y}{6} = \frac{Y}{4} \\ \Rightarrow \log_a^a &= \frac{Y}{4} \Rightarrow a = 10^{\frac{Y}{4}} = \sqrt[4]{10^Y} = \sqrt[4]{10^4 \times 10^3} = 10\sqrt[4]{1000} \end{aligned}$$

۱۳

قایق بادی داریم که به علت وجود یک نشتی کوچک در آن، روزانه ۱۰ درصد موجود در باد آن خارج می‌شود. پس از گذشت چند روز، ۷۰ درصد باد قایق از آن خارج می‌شود؟ ($\log 3 \simeq 0/45$)

۷ (۴)

۶/۵ (۳)

۶ (۲)

۵/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۸%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۱»

مطابق با رابطه رشد و زوال نمایی، داریم:

$$A = A_0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n \Rightarrow \frac{3}{10} A_0 = A_0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n \Rightarrow \frac{3}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

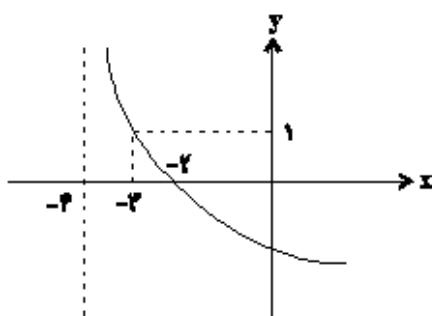
دقت کنید وقتی که ۷۰ درصد باد قایق خارج می‌شود، ۳۰ درصد یا $\frac{3}{10}$ آن باقی می‌ماند:

$$\Rightarrow \log \frac{3}{10} = \log \left(\frac{9}{10}\right)^n \Rightarrow \log 3 - 1 = n(\log 9 - 1)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 3 - 1}{2 \log 3 - 1} = \frac{0/45 - 1}{0/9 - 1} = \frac{-0/55}{-0/1} = 5/5$$

۱۴

نمودار تابع $f(x) = a + \log_c^{(x+b)}$ به صورت زیر است. مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟



۱۰ (۱)

-۱۰ (۲)

۸ (۳)

-۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

ساده

درصد پاسخگویی ۴۳%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۱»

$$D_f = (-4, +\infty) \Rightarrow x > -4 \Rightarrow x + 4 > 0 \Rightarrow b = 4$$

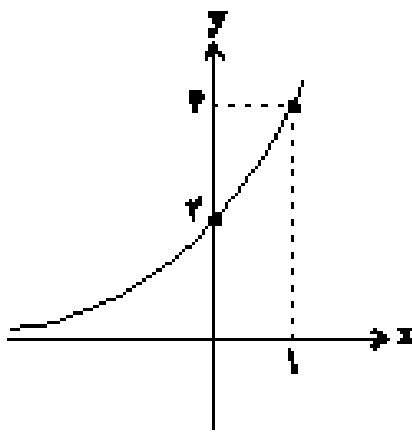
$$f(-3) = 1 \Rightarrow a + \log_c^1 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 1 + \log_c^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{1+4}{\frac{1}{2}} = 10$$

۱۵

شکل زیر مربوط به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2^{ax-b}$ است. حاصل $f(4)$ کدام است؟



(۱) ۸

(۲) ۱۶

(۳) ۳۲

(۴) ۶۴

متوسط

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار تابع f داریم:

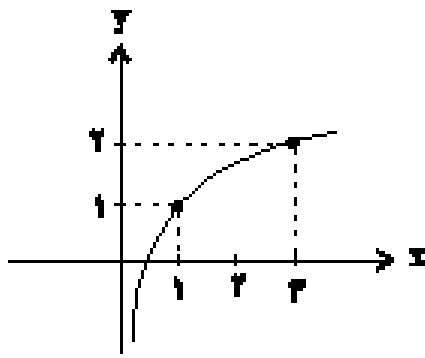
$$\begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow 2^{a \cdot 0 - b} = 2 \Rightarrow 2^{-b} = 2 \\ \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1 \\ f(1) = 4 \Rightarrow 2^{a \cdot 1 - b} = 4 \xrightarrow{b=-1} 2^{a+1} = 2^2 \\ \Rightarrow a+1 = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

لذا تابع f به صورت $f(x) = 2^{x+1}$ خواهد بود.

$$\Rightarrow f(4) = 2^{4+1} = 2^5 = 32$$

۱۶

نمودار تابع $f(x) = a + \log_b x$ به شکل زیر است. مقدار $a + b$ کدام است؟



۵ (۱)

۴ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

دشوار

قلمچی ۱۴۰۰

نمودار تابع f از نقاط $(1, 1)$ و $(3, 2)$ عبور کرده است. بنابراین:

$$f(1) = 1 \Rightarrow 1 = a + \log_b 1 \Rightarrow 1 = a + 0 \Rightarrow a = 1$$

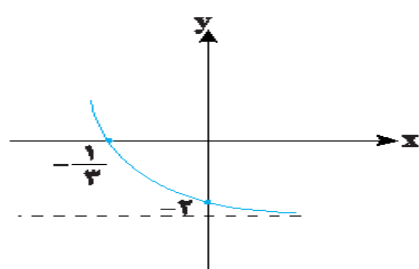
$$f(3) = 2 \Rightarrow 2 = a + \log_b 3 \xrightarrow{a=1} 2 = 1 + \log_b 3$$

$$\Rightarrow 1 = \log_b 3 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow a + b = 1 + 3 = 4$$

۱۷

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ ، کدام است؟



۵۴ (۱)

۶۰ (۲)

۴۸ (۳)

۲۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نسبتا دشوار

کنکور سراسری ۱۳۹۹

با توجه به نمودار، مختصات دو نقطه $(-\frac{1}{3}, 0)$ و $(0, -2)$ در ضابطه تابع f صدق می‌کند. بنابراین:

$$f(0) = -2 \Rightarrow -4 + 2^b = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$f(-\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow -4 + 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{a}{3}+1} = 2^2 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 1 = 2 \Rightarrow a = -3$$

حال مقدار تابع را به ازای $x = -\frac{5}{3}$ به دست می‌آوریم:

$$f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \xrightarrow{x=-\frac{5}{3}} f(-\frac{5}{3}) = -4 + 2^{-3(-\frac{5}{3})+1} = -4 + 2^6 = 60$$

۱۸

قدرت یک زلزله ۵ ریشتر (۵M) است. انرژی آزاد شده در آن چند ارگ (E) است؟
($\log 2 = 0.3$, $\log E = 11/8 + 1/5 M$)

(۱) 2×10^{19}

(۳) 2×10^{18}

(۲) 3×10^{19}

(۴) 3×10^{18}

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \xrightarrow{M=5} \log E = 11/8 + 7/5 = 19/3 \rightarrow E = 10^{19/3}$$

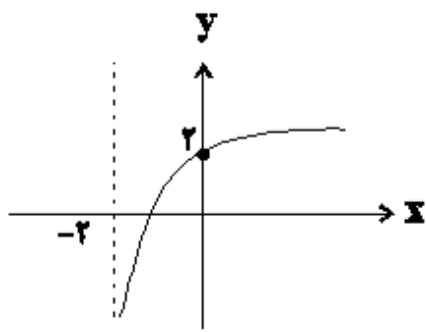
با فرض $\log 2 = 0.3$ ، داریم: $10^{0.3} = 2$

پس:

$$E = 10^{19/3} = 10^{19} \times \underbrace{10^{0.3}}_2 = 2 \times 10^{19}$$

۱۹

شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = \log_p^{(ax+b)}$ است. این تابع، خط $y = 5$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



۱۱ (۱)

۱۲ (۲)

۱۳ (۳)

۱۴ (۴)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۱%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

تابع از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد:

$$f(x) = \log_p^{(ax+b)} \Rightarrow 2 = \log_p^b \Rightarrow b = 4$$

$x = -2$ ، ریشه عبارت جلوی لگاریتم است:

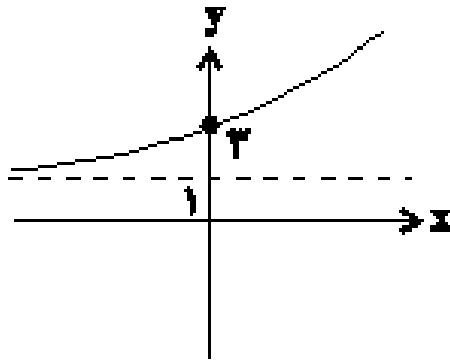
$$ax + b = 0 \xrightarrow[x=-2]{b=4} -2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

پس ضابطه به صورت $f(x) = \log_p^{(2x+4)}$ است. آن را با خط $y = 5$ قطع می‌دهیم.

$$\log_p^{(2x+4)} = 5 \Rightarrow 2x + 4 = 2^5 \Rightarrow x = 14$$

۲۵

اگر نمودار $f(x) = 2^{x+a} + b$ به صورت زیر باشد، حاصل $f^{-1}(17)$ کدام است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

ساده

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»

حد تابع در $-\infty$ برابر با یک است و نشان از آن دارد که نمودار یک واحد به بالا انتقال یافته است.

$$b = 1$$

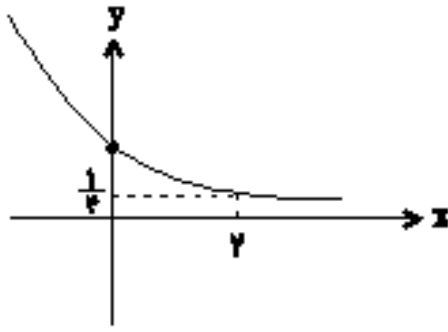
$$f(0) = 3 \Rightarrow 2^a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow f(c) = 2^{c+1} + 1 = 17 \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(17) = 3$$

۲۱

شکل زیر نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ است. حاصل $f(-2) + f(0)$ کدام است؟



۷ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۹ (۴)

ساده

درصد پاسخگویی ۵۱%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به آنکه نمودار تابع از نقطه $(2, \frac{1}{4})$ عبور کرده است، بنابراین:

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \\ f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = 4 + 1 = 5$$

۲۲

حاصلضرب ریشه‌های معادله $16x^3 = x^{\log_x^x}$ کدام است؟

۵ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درصد پاسخگویی ۲۱%

قلمچی ۱۳۹۹

متوسط

گزینه «۲»

از طرفین تساوی، لگاریتم در پایه ی ۲ می‌گیریم:

$$16x^3 = x^{\log_x^x} \Rightarrow \log_2 16x^3 = \log_2 x^{\log_x^x}$$

$$\Rightarrow \log_2 2^4 + \log_2 x^3 = (\log_2 x)(\log_2 x)$$

$$\Rightarrow 4\log_2 2 + 3\log_2 x = (\log_2 x)(\log_2 x)$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)(\log_2 x) - 3\log_2 x - 4 = 0$$

حال قرار می‌دهیم $a = \log_2^x$ ، بنابراین داریم:

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ a = 4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

۲۳

اگر $\log_3^{(3^a-8)} = 2 - a$ باشد، حاصل $\log_{(4a+1)}^{(2a-1)}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

درصد پاسخگویی ۲۸%

قلمچی ۱۳۹۹

متوسط

اگر $\log_c^x = b$ باشد، آن‌گاه $x = c^b$. بنابراین:

$$\log_3^{3^a-8} = 2 - a \Rightarrow 3^a - 8 = \frac{3^2}{3^a} \xrightarrow{t=3^a}$$

$$t - 8 = \frac{9}{t} \Rightarrow t^2 - 8t - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 = 3^a \Rightarrow a = 2 \\ \text{غ ق ق} \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\log_{(4a+1)}^{(2a-1)} \xrightarrow{a=2} \log_9^3 = \frac{1}{2}$$

شدت دو زلزله در مقیاس ریشتر به اندازه 0.6 اختلاف دارند. نسبت دو انرژی آزاد شده کدام می‌تواند باشد؟
 $(\log E = 11/8 + 1/5M)$

(۴) $10^{0.6}$ (۳) $10^{0.9}$ (۲) $10^{1/5}$ (۱) $10^{1/2}$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۲%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا انرژی آزاد شده را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

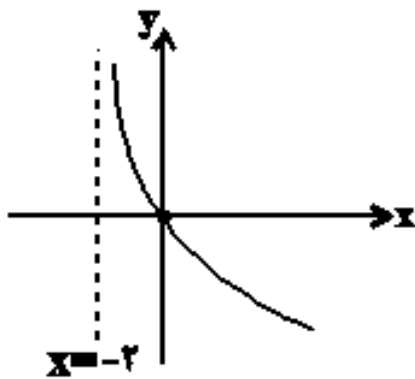
$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow E = 10^{11/8 + 1/5M}$$

بنابراین:

$$E_2 = 10^{11/8 + 1/5M_2}, \quad E_1 = 10^{11/8 + 1/5M_1}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{M_2 - M_1 = 0.6} \frac{E_2}{E_1} &= 10^{11/8 + 1/5M_2 - (11/8 + 1/5M_1)} \\ &= 10^{1/5(M_2 - M_1)} = 10^{1/5(0.6)} = 10^{0.9} \end{aligned}$$

شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = \log\left(\frac{1}{ax+b}\right)$ را نمایش می‌دهد. مقدار a کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۳%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \log\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \log(ax+b)^{-1} = -\log(ax+b)$$

تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد.

$$y(0) = 0 \Rightarrow -\log(b) = 0 \Rightarrow b = 1$$

به‌علاوه دامنه تابع $x > -2$ است یعنی به ازای $x = -2$ عبارت داخل لگاریتم باید برابر صفر باشد.

$$y = -\log(ax+1) \xrightarrow{x=-2} -2a+1=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

در کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t دقیقه پس از شروع، از رابطه $f(t) = A \times 2^{kt}$ پیروی می‌کند. اگر تعداد باکتری‌ها در شروع کشت ۴۰۰ و در دقیقه دوم برابر ۲۵۶۰۰ باشد، در دقیقه سوم تعداد باکتری‌ها کدام است؟ (A و k اعداد ثابتی هستند)

۲۰۴۸۰۰ (۲)

۱۰۲۴۰۰ (۱)

۲۵۶۰۰ (۴)

۵۱۲۰۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۱%

قلمچی ۱۳۹۹

$$f(t) = A \times 2^{kt} \xrightarrow{t=0 \rightarrow f(0)=400} 400 = A \times 2^{k(0)} \\ \Rightarrow A = 400$$

از طرفی در دقیقه دوم تعداد باکتری‌ها ۲۵۶۰۰ است:

$$f(2) = 25600 \xrightarrow{f(t)=400 \times 2^{kt}} 25600 = 400 \times 2^{2k} \\ \Rightarrow 2^{2k} = \frac{25600}{400} = 64 \Rightarrow 2^{2k} = 2^6 \Rightarrow 2k = 6 \\ \Rightarrow k = 3 \Rightarrow f(t) = 400 \times 2^{3t} \xrightarrow{t=3} f(3) = 400 \times 2^9 \\ \Rightarrow f(3) = 400 \times 512 = 204800$$

نیمه‌عمر یک ماده هسته‌ای دو برابر نیمه‌عمر ماده هسته‌ای X است. اگر نیمه‌عمر ماده X برابر T سال باشد پس از گذشت چند سال، جرمی که از ماده X باقی می‌ماند $\frac{1}{8}$ جرمی است که از ماده مورد نظر باقی می‌ماند؟ (جرم‌های اولیه را یکسان فرض کنید.)

۸T (۴)

۶T (۳)

۵T (۲)

۴T (۱)

پاسخ: گزینه ۳

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸%

قلمچی ۱۳۹۹

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

رابطه نیمه‌عمر:

T: نیمه‌عمر

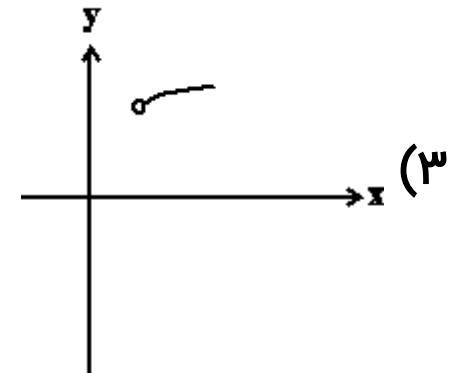
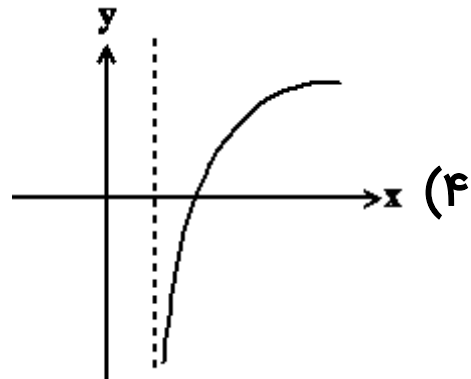
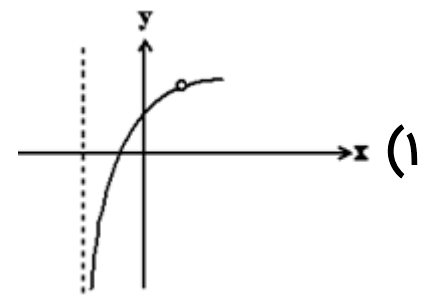
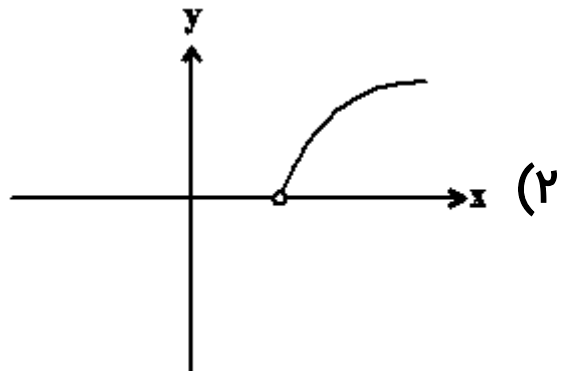
m: جرم باقی‌مانده

m₀: جرم اولیه

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{m_0}{m_0} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \frac{t}{T} = 3 \Rightarrow t = 3T$$

نمودار تابع $f(x) = \log_p(x^2 + 2x - 3) - \log_p(x - 1)$ به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه ۳

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰٪

قلمچی ۱۳۹۹

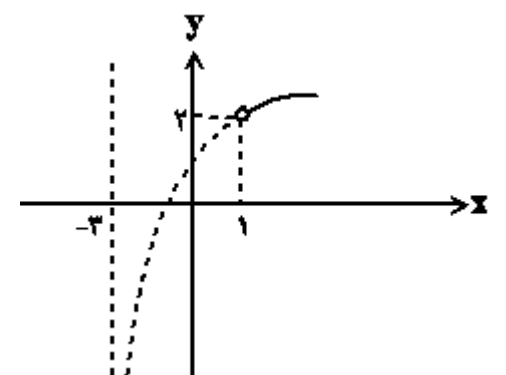
گزینه «۳»

ابتدا دامنه f را به دست می‌آوریم:

$$D_f : \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow x < -3 \cup x > 1 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$f(x) = \log_p \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \log_p \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \log_p(x + 3)$$

نمودار این تابع به صورت، زیر است. (با توجه به دامنه، قسمت نقطه‌چین نمودار قابل قبول نیست.)



۲۹

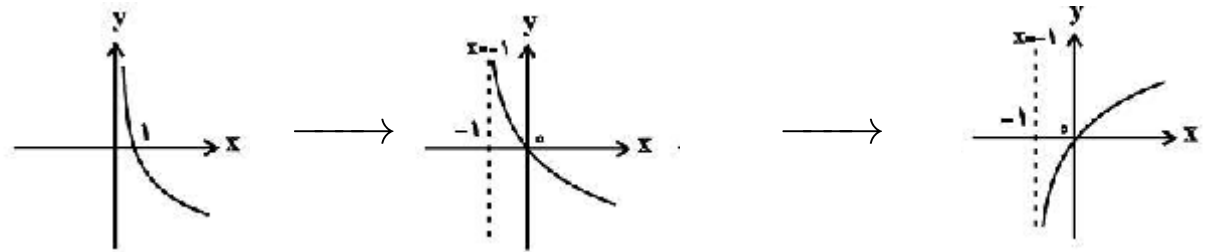
نمودار تابع $y = -\log_{0.7}^{(x+1)}$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

- (۱) اول و دوم و سوم (۲) اول و سوم و چهارم (۳) اول و سوم (۴) دوم و چهارم

پاسخ: گزینه ۳

ساده درصد پاسخگویی ۳۹% قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۳»



- ۱) $y = \log_{0.7} x$ ۲) $y = \log_{0.7} (x+1)$ ۳) $y = -\log_{0.7} (x+1)$

این نمودار فقط از نواحی اول و سوم می‌گذرد.

۳۰

زلزله‌ای به شدت ۴ ریشتر، شهری را لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله کدام است؟
($\log E = 11/8 + 1/5M$)

- (۱) $10^{11/8}$ (۲) $10^{16/3}$ (۳) $10^{17/8}$ (۴) $10^{15/3}$

پاسخ: گزینه ۳

ساده درصد پاسخگویی ۵۷% قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۳»

با توجه به رابطه زیر داریم:

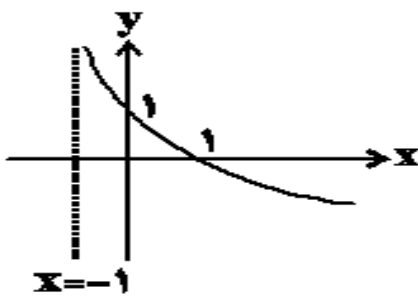
$$\log E = 11/8 + 1/5M$$

زلزله به شدت ۴ ریشتر است، بنابراین:

$$\log E = 11/8 + 1/5 \times (4) = 17/8 \Rightarrow E = 10^{17/8} \text{ Erg}$$

۳۱

اگر نمودار تابع $f(x) = a - \log_b^{(x+1)}$ به صورت زیر باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۲

(۳) -۲

(۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

متوسط درصد پاسخگویی ۲۹% قلمچی ۱۳۹۹

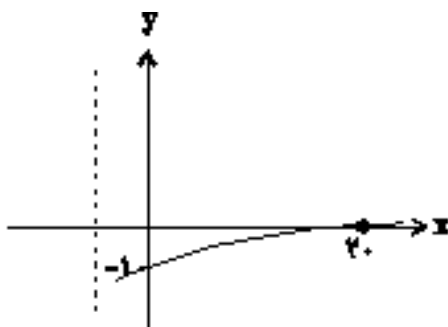
نمودار تابع $f(x)$ از دو نقطه $(0, 1)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(0,1)} f(0) &= a - \log_b^1 = 1 \Rightarrow a - 0 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow f(x) &= 1 - \log_b^{(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(1,0)} f(1) &= 1 - \log_b^2 = 0 \Rightarrow \log_b^2 = 1 \Rightarrow b = 2 \\ \Rightarrow a - b &= 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

۳۲

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -3 + \log_5^{(ax+b)}$ را نشان می‌دهد. حاصل $f(-4)$ کدام است؟



(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) تعریف نشده

پاسخ: گزینه ۱

ساده درصد پاسخگویی ۴۹% قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \Rightarrow -3 + \log_5^b = -1 \Rightarrow \log_5^b = 2 \\ \Rightarrow b &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(20) &= 0 \Rightarrow -3 + \log_5^{(20a+25)} = 0 \Rightarrow \log_5^{(20a+25)} = 3 \\ \Rightarrow 20a + 25 &= 125 \Rightarrow 20a = 100 \Rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -3 + \log_5^{(5x+25)} \Rightarrow f(-4) = -3 + \log_5^5 = -2$$

۳۳

جواب معادله $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_6(\log 5)}$ کدام است؟

$\log \frac{3}{5}$ (۲)

$\log \frac{2}{5}$ (۱)

$\log 6$ (۴)

$\log 5$ (۳)

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۷%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

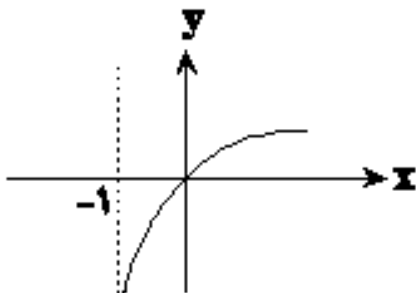
$$\frac{1}{\log_2 x} = \log_x 2, \quad \frac{1}{\log_3 x} = \log_x 3, \quad \frac{1}{\log_6(\log 5)} = \log_{(\log 5)} 6$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$\log_x 2 + \log_x 3 = \log_{(\log 5)} 6 \Rightarrow \log_x 6 = \log_{(\log 5)} 6 \Rightarrow x = \log 5$$

۳۴

اگر نمودار تابع $f(x) = a + \log_2^{x+b}$ به شکل زیر باشد، طول نقطه برخورد این تابع با خط $y = 3$ برابر با کدام گزینه است؟



۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۱%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

دامنه این تابع $(-1, +\infty)$ است؛ لذا $x = -1$ ریشه عبارت جلوی لگاریتم می‌باشد. $-1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$

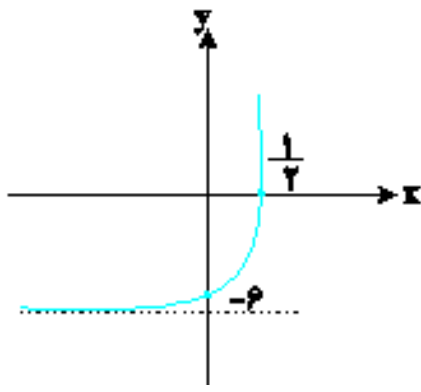
همچنین نمودار از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد: $0 = a + \log_2^1 \Rightarrow a = 0$

پس داریم: $f(x) = \log_2^{x+1}$

حال طول نقطه برخورد تابع f با خط $y = 3$ را می‌یابیم:

$$\log_2^{x+1} = 3 \Rightarrow x+1 = 8 \Rightarrow x = 7$$

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. کدام است؟



(۱) ۲۳۴

(۲) ۱۰۸

(۳) ۷۲

(۴) ۱۸

متوسط

خارج از کشور ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به نمودار، دو نقطه $(\frac{1}{2}, 0)$ و $(0, -6)$ روی نمودار قرار دارند. مختصات این دو نقطه در ضابطه تابع f صدق می‌کند. بنابراین:

$$f(0) = -6 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{0+b} = -6 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^b = 3 \Rightarrow b = -1$$

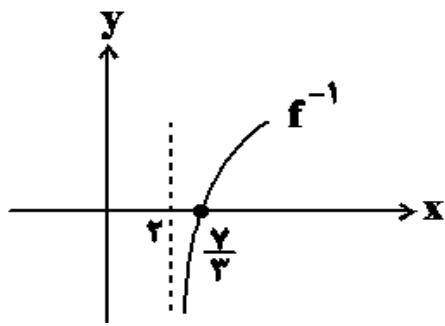
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{a\left(\frac{1}{2}\right)-1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{2}-1} = 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} - 1 = -2 \Rightarrow a = -2$$

مقدار $f(2)$ برابر است با: $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$

$$f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2(2)-1} = 234$$

اگر نمودار معکوس تابع $f(x) = \frac{3^{2x}}{3^a} - b$ به صورت زیر باشد. مقدار $f(2)$ کدام است؟



(۱) ۲۵

(۲) ۲۹

(۳) وجود ندارد

(۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۳

قلمچی ۱۳۹۹

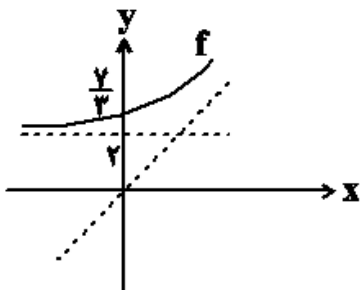
درصد پاسخگویی ۱۳%

متوسط

نمودار f^{-1} را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم تا نمودار f به دست آید:

کمی تابع f را ساده کنیم:

$$f(x) = \frac{3^{2x}}{3^a} - b = 3^{2x-a} - b$$



با توجه به شکل مشخص است که نمودار تابع نمایی ۲ واحد به بالا انتقال یافته است. پس:

$$-b = 2 \Rightarrow b = -2$$

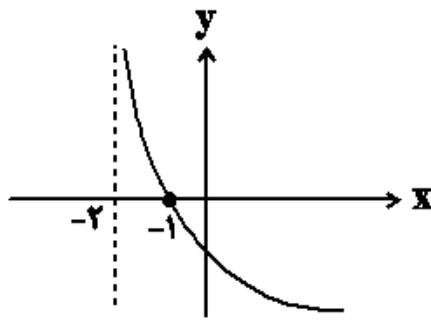
از طرفی نمودار f از نقطه $(0, \frac{7}{3})$ عبور می‌کند:

$$f(0) = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{7}{3} = 3^{2(0)-a} + 2 \rightarrow \frac{7}{3} - 2 = 3^{-a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-a} \rightarrow 3^{-1} = 3^{-a} \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 3^{2x-1} + 2$$

$$\xrightarrow{x=2} f(2) = 3^3 + 2 = 29$$

شکل روبه‌رو مربوط به نمودار تابع $y = \log_p^{f(x)}$ است، کدام $f(x)$ است؟



(۱) $x + ۲$

(۲) $x - ۲$

(۳) $\frac{1}{x+۲}$

(۴) $\frac{1}{x-۲}$

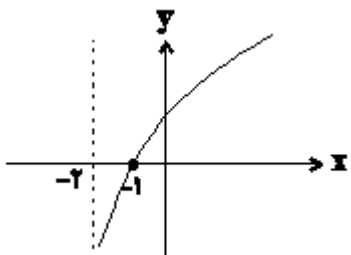
متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲%

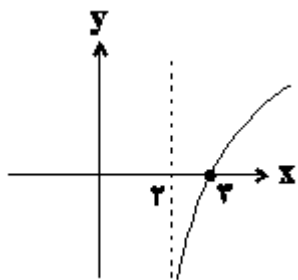
قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

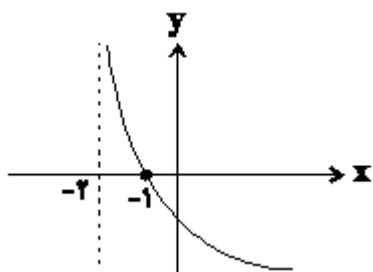
گزینه ۱ $y = \log_p^{(x+۲)}$



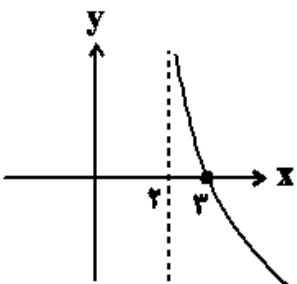
گزینه ۲ $y = \log_p^{(x-۲)}$



گزینه ۳ $y = \log_p^{\frac{1}{x+۲}} = \log_p^{(x+۲)^{-1}} = -\log_p^{(x+۲)}$



گزینه ۴ $y = \log_p^{\frac{1}{x-۲}} = \log_p^{(x-۲)^{-1}} = -\log_p^{(x-۲)}$



۳۸

اگر $\log(7x - 1) + \log(x + 2) = 2$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{7}}(7x - 1)$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

از رابطه‌های $\log a + \log b = \log ab$ و $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$ استفاده می‌کنیم:

$$\log(7x - 1) + \log(x + 2) = 2 \Rightarrow \log(7x - 1)(x + 2) = 2$$

$$\Rightarrow (7x - 1)(x + 2) = 10^2 = 100 \Rightarrow 7x^2 + 13x - 102 = 0$$

$$\Rightarrow (7x + 34)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{ق ق} \\ x = -\frac{34}{7} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{7}}^{7x-1} \quad \underline{x = 3} \quad \log_{\sqrt{7}}^7 = \log_{7^{\frac{1}{2}}}^7 = 2 \log_7^7 = 2$$

۳۹

نمودار تابع $f(x) = \log(ax + b)$ با دامنه $(-\infty, 1)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. اگر طول نقطه برخورد نمودار حاصل با نمودار f ، برابر $-\sqrt{5}$ باشد، آنگاه $f(-19)$ کدام است؟

$\log 9$ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

به ازای دامنه تابع داده شده داریم:

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \xrightarrow[\div a]{a < b} x < \frac{-b}{a} \Rightarrow (-\infty, \frac{-b}{a}) = (-\infty, 1) \Rightarrow \frac{-b}{a} = 1 \Rightarrow b = -a$$

$$f(x) = \log(ax - a) = \log a(x - 1) \xrightarrow[x \rightarrow x+2]{\text{دو واحد به چپ}} \log a(x + 1) \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} -\log a(x + 1)$$

$f(x) = -f(x)$

$$f(x) = -\log a(x + 1)$$

$$\Rightarrow \log a(x - 1) = \log \frac{1}{a(x+1)} \Rightarrow a(x - 1) = \frac{1}{a(x+1)}$$

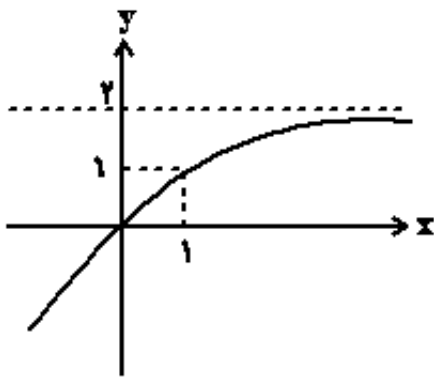
$$\Rightarrow a^2(x^2 - 1) = 1 \xrightarrow{x = -\sqrt{5}} 4a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{2}$$

با جایگذاری a و b در تابع داریم:

$$f(x) = \log\left(-\frac{1}{2}(x - 1)\right) \Rightarrow f(-19) = \log 10 = 1$$

۴۰

اگر نمودار تابع $f(x) = 2 - b^{-x+c}$ به صورت مقابل باشد، آنگاه حاصل $b + c$ کدام است؟



۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

ساده درصد پاسخگویی ۵۵% قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f(x) = 2 - b^{-x+c}$$

$$(0, 0) \in f \Rightarrow 2 - b^c = 0 \Rightarrow b^c = 2$$

$$(1, 1) \in f \Rightarrow 2 - b^{-1+c} = 1$$

$$\Rightarrow b^{-1+c} = 1 \Rightarrow b^{-1} \times \underbrace{b^c}_2 = 1$$

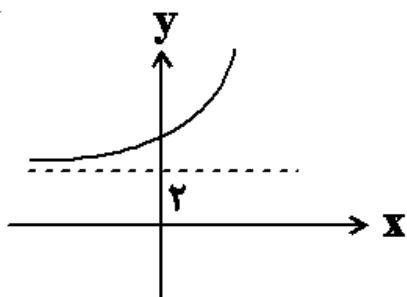
$$\Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$b^c = 2 \xrightarrow{b=2} 2^c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow b + c = 2 + 1 = 3$$

(۴۱)

نمودار مقابل مربوط به تابع با ضابطه $f(x) = 2^{ax} + b$ است و نقطه $(3, 6)$ روی آن قرار دارد، حاصل $\log_b^{3a}$ کدام است؟ ($a > 0$)



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع $y = 2^{ax}$ به اندازه ۲ واحد روی محور y ها به سمت بالا انتقال یافته است، بنابراین $b = 2$ است. از طرفی طبق فرض سؤال نقطه $(3, 6)$ روی نمودار است. پس داریم:

$$\begin{cases} f(3) = 6 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2^{3a} + 2 = 6 \Rightarrow 2^{3a} = 4$$

$$\Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\log_b^{3a} = \log_2^{3 \times \frac{2}{3}} = \log_2^2 = 1$$

(۴۲)

اگر بزرگی زلزله‌ای (M) در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد اِرج (Erg) است که از رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ به دست می‌آید. به ازای یک واحد افزایش در مقیاس M انرژی آزاد شده تقریباً چند برابر می‌شود؟

(۴) ۳۲

(۳) ۱۳

(۲) ۱۰

(۱) ۲۳

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۴%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1$$

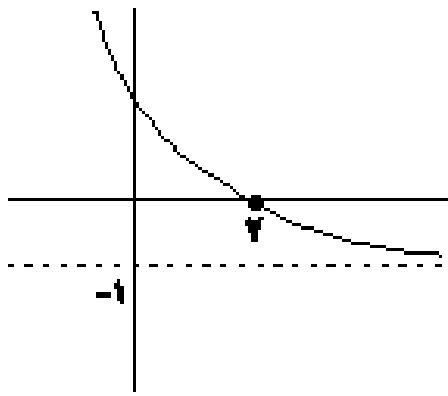
$$\log E_2 = 11/8 + 1/5 M_2 = \overset{M_2=M_1+1}{=} \log E_2 = 11/8 + 1/5 M_1 + 1/5$$

$$\Rightarrow \log E_2 - \log E_1 = \log \frac{E_2}{E_1} = 1/5$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5} = 10^{\frac{2}{10}} = \sqrt{1000} \simeq 32$$

۴۳

نمودار تابع $f(x) = 3^{a-x} + b$ به صورت مقابل است. $a - b$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به نمودار، $b = -1$ پس $f(x) = 3^{a-x} - 1$ و با جایگذاری $A(2, 0)$ داریم:

$$0 = 3^{a-2} - 1 \Rightarrow 3^{a-2} = 1 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه:

$$a - b = 2 - (-1) = 3$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۶%

قلمچی ۱۴۰۰